III/ Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

1. Soit la suite (v_n) définie par

$$v_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{t}{t-\ln t}dt,\ n \geq 1.$$

a. Montrer que pour tout t de $]0,+\infty[$, $\frac{t}{t-\ln t} \leq t$.

b. Montrer que la suite (v_n) est croissante.

c. En déduire que la suite (v_n) est convergente et que $0 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n \leq \frac{1}{2}$.

2. Soit la suite (w_n) définie par

$$w_n = \int_1^n \frac{t}{t-\ln t}dt\ n \geq 1.$$

a. Montrer que pour tout t de $[1,+\infty[$,

$\frac{t}{t-\ln t} \leq 1+\ln t$.

b. Calculer $\int_1^n 1+\frac{\ln t}{t}dt$.

c. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

30 A/ Soit f la fonction définie sur $[2,+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Montrer que f est dérivable sur $]2,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

b. Montrer que $\lim\limits_{x\to2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = +\infty$.

c. Dresser le tableau de variation de f.

2. a. Etudier la position de la courbe de C_f et de la droite $D: y = x$.

b. Construire C_f.

3. a. Montrer que f réalise une bijection de $[2,+\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

b. Construire dans le même repère la courbe C' de la fonction réciproque f^{-1} de f.

B/ Soit F la fonction définie sur $]0,1]$ par

$$F(x) = \int_2^{\frac{2}{x}} f(t)dt.$$

1. Montrer que F est dérivable sur $]0,1]$ et calculer $F'(x)$.

2. a. Montrer que pour tout $t \in [2,+\infty[$, $f(t) \geq \ln t$.

b. Calculer l'intégrale $\int_2^{\frac{2}{x}} \ln t\,dt$.

c) En déduire que pour tout $x \in]0,1]$,

$$F(x) \geq \frac{2}{x}\left(\ln\left(\frac{2}{x}\right)-1\right).$$

d. Calculer alors $\lim\limits_{x\to0^+} F(x)$

3. Dresser le tableau de variation de F et donner une allure de la courbe de F.

C/ Pour tout $x \in]2,+\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$g_n(x) = \int_{2\sqrt{2}}^{x} \frac{t^{2n}}{\sqrt{t^2-4}}dt \text{ et } \ell_n = \lim_{x\to2^+} g_n(x).$$

1. Justifier l'existence de $g_n(x)$ pour tout $x \in]2,+\infty[$.

2. Calculer $g_0(x)$ pour $x \in]2,+\infty[$. En déduire ℓ_0.

3. Montrer que pour tout $x \in]2,+\infty[$,

$$g_1(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} - 2\sqrt{2} + 2g_0(x).$$

En déduire ℓ_1.

4. a. Montrer que pour tout $x \in]2,+\infty[$ et pour tout, $n \in \mathbb{N}$, $g_{n+1}(x) = x^{2n+1}\sqrt{x^2-4} - 2^{3n+2}\sqrt{2} - (2n+1)\int_{2\sqrt{2}}^{x} t^{2n}\sqrt{t^2-4}\,dt$.

b. En déduire que pour tout $x \in]2,+\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(2n+2)g_{n+1}(x) = x^{2n+1}\sqrt{x^2-4} - 2^{3n+2}\sqrt{2} + 4(2n+1)g_n(x).$$

c. Exprimer ℓ_{n+1} à l'aide de ℓ_n.

Qarray.tn - Aqra Blech- Qarray.tn